

BΑΣΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Κατανόηση των τριπτών?

Το αρχαιότερο πρόβλημα των μαθηματικών.

Με πολλές εφαρμογές.

Ορισμός: Με $\pi(x)$ συμβολίζουμε το αριθμό των τριπτών μικρότερων ή ίσων του x .

$$\pi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{N} \text{ με } \pi(x) = \# \text{τριπτών} \leq x.$$

1) Με απόδειξη των τριπτών. Αντί να αποδείξουμε τους τριπτούς μέχρι το x . Αντί να τους βρούμε όλους μέχρι το x .

2) Τι ερωτήσεις έχει αυτή η ερώτηση?

Chebyshev: Υπάρχουν σταθερές c και C ώστε $c \frac{x}{\log x} < \pi(x) < C \frac{x}{\log x}$
Στην κατάξ. προσεγγιστ. η ερώτηση του Möbius!

Θ. Chebyshev $\rightarrow$ Μετάφρ. του n και του $2n$ υπάρχει ένας τριπτός για κάθε $n > 1$.

Η ερώτηση για το Riemann.

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ με τύπο } f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (\underline{s=1 \text{ singular}})$$

Με τη f μελετάμε την κατανόηση των τριπτών. (Η ερώτηση μ. του Möbius είναι το κύριο ερώτημα.)

Αρκετώνες Συναρτήσεις

Κάθε συνάρτηση της μορφής $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ καλείται αρκετών. συνάρτηση.

Εξ. 1) $f(n) = n = \text{ταυτότητ.} = 1(n)$

2) $f(n) = n^k$ για $k \in \mathbb{C}$

3) $f(n) = n^i$

4) $f(n) = e^{in}$

ΟΡΙΣΜΟΣ. Μια αριθμητική συνάρτηση $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ καλείται πολλαπλασιαστική, αν ισχύει $f(nm) = f(n) \cdot f(m)$, για $(n, m) = 1$.
 Αν η f είναι πολλαπλασιαστική $\forall n, m$, τότε καλείται ολικά πολλαπλασιαστική.

ΠΡ. 1) Η συνάρτηση ϕ του Euler είναι πολλαπλασιαστική. $\phi(n)$ = πλήθος αριθμών με τον n και μικρότερων.
 $\phi(28) = \phi(4 \cdot 7) = \phi(4) \cdot \phi(7) = \phi(2^2) \cdot \phi(7) = 2(2-1) \cdot 6$
 2) Η συνάρτηση $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ με τύπο $\tau(n)$ = το πλήθος των διαιρετών του n .

ΠΡ. $\tau(28) = 6$
 $1, 2, 4, 7, 14, 28$.

3) Η συνάρτηση $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ με τύπο $\sigma(n)$ = το άθροισμα των διαιρετών του n .

ΠΡ. $\sigma(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 =$

4) Η συνάρτηση $\sigma_k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ με $k \in \mathbb{N}$ με τύπο $\sigma_k(n)$ = το άθροισμα των διαιρετών υψωμένων στην k .

$\sigma_k(28) = 1^k + 2^k + 4^k + 7^k + 14^k + 28^k$.

5) Η ταυτοτική $1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ $1(n) = n$ ολικά πολλαπλασιαστική.

6) Η συνάρτηση $g: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ με τύπο $g(1) = 1$ κ' $g(n) = 0$ για $n > 1$.

$g(nm) = g(n)g(m)$ $(n, m) = 1$

Αν $nm > 1 \Rightarrow g(nm) = 0$.

$nm > 1 \Rightarrow n > 1 \wedge m > 1 \Rightarrow g(n) = 0 \wedge g(m) = 0$

Άρα $g(nm) = g(n) \cdot g(m) = 0$.

Αν $nm = 1 \Rightarrow n = m = 1 \Rightarrow g(1 \cdot 1) = 1 = g(1) \cdot g(1)$.

Λήμμα. Εάν η f είναι πολλαπλασιαστική, τότε και η F που ορίζεται από $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$, είναι επίσης πολλαπλασιαστική.

Αποδ. Αν $d|n \Rightarrow \frac{n}{d}|n$ (Αντ. οι διαμέτρες εμμετρικότητα και ίση).

Διαμέτρες του 18 = $\frac{1}{1}, \frac{2}{9}, \frac{3}{6}, \frac{6}{3}, \frac{9}{2}$
 $18 = \frac{18}{1}$ ← $\frac{18}{1}, \frac{18}{2}, \frac{18}{3}, \frac{18}{6}, \frac{18}{9}, \frac{18}{18}$

Αρα $\sum_{d|n} f(d) = \sum_{\frac{n}{d}|n} f\left(\frac{n}{d}\right)$

Εστω ότι $(m, n) = 1$

Αν ο d_1 διατρέχει όλους τους διαμέτρες του m και ο d_2 του n , τότε ο $d_1 d_2$ διατρέχει όλους τους διαμέτρες του mn .

Αν ο d διατρέχει όλους τους διαμέτρες του mn , έσδ' $(m, n) = 1$ τότε $d = (d, mn) = (d, m)(d, n) = d_1 d_2$.

$$F(mn) = \sum_{d|mn} f(d) = \sum_{d_1|m, d_2|n} f(d_1 d_2) *$$

$(m, n) = 1, d_1|m, d_2|n \Rightarrow (d_1, d_2) = 1$

Αρα $F(m, n) = \sum_{d_1|m, d_2|n} f(d_1) f(d_2) = \sum_{d_1|m} f(d_1) \sum_{d_2|n} f(d_2) = F(m) F(n)$

Παλ. $\phi(n) = \sum_{d|n} d = \sum_{d|n} L(d)$ και η ταυτότητα είναι το ίδιο. Αρα και ϕ είναι το ίδιο.

ΥΠΟΘΕΣΗ: Τύπος του Gauss

$$n = \sum_{d|n} \phi(d)$$

ϕ το ίδιο και $1(n) = n$ ταυτότητα το ίδιο.

Ορισμός: Η συνάρτηση μ του Mobius $\mu: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ με τύπο $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = 0$ όταν $p^2|n$ με p πρώτος, $\mu(p_1 p_2 \dots p_r) = (-1)^r$ με πρώτους $1 < p_1 < \dots < p_r$.

Πρόταση: Η συνάρτηση μ είναι το ίδιο.

Αποδ. 1) Αν $n = m = 1 \Rightarrow \mu(1 \cdot 1) = 1 = \mu(1) \cdot \mu(1)$.

2) Αν $p^2|mn$, $(m, n) = 1 \Rightarrow p^2|m$ ή $p^2|n$

Αρα $\mu(mn) = 0 = \mu(m) \mu(n)$

3) Αν $m \cdot n = p_1 \dots p_r$ και $(m, n) = 1 \Rightarrow$

$m = \text{γινόμενο διακεκριμένων πρώτων} = p_{i_1} \dots p_{i_k}$

$n = \text{γινόμενο διακεκριμένων πρώτων} = p_{j_1} \dots p_{j_{r-k}}$

$$\mu(mn) = (-1)^r$$

$$\mu(m) = (-1)^k$$

$$\mu(n) = (-1)^{r-k} \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \mu(m) \cdot \mu(n) = (-1)^k \cdot (-1)^{r-k} = (-1)^r \end{array} \right.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ. Εφαρμογή του τελευταίου θεωρήματος στη συνάρτηση μ .

$$\sum_{d|n} \mu(d) = g(n) = \begin{cases} 1 & \text{για } n=1 \\ 0 & \text{για } n>1 \end{cases}$$

ΑΠΟΔ. Έστω $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)$

$$f(1) = \sum_{d|1} \mu(d) = 1$$

Έστω $n = p^k$ $f(n) = f(p^k)$ $k > 1$

$$f(p^k) = \sum_{d|p^k} \mu(d) = \mu(1) + \mu(p) + \mu(p^2) + \dots + \mu(p^k) = 0 \quad \oplus$$

Οι διακρίτες του p^k είναι $p^0=1, p^1=p, p^2, \dots, p^k$.

Έστω $n = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$ $n > 1$.

Η f συμporta με το θεωρήμα είναι πολλαπλή.

$$f(n) = f(p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}) = f(p_1^{k_1}) f(p_2^{k_2}) \dots f(p_r^{k_r}) \stackrel{\oplus}{=} 0$$

Θεώρημα. Τύπος αντιστροφής του Möbius.

Έστω f πολλαπλή (ή πολλαπλή πολλαπλή) συνάρτηση και

$$f(n) = \sum_{d|n} f(d), \text{ τότε } f(n) = \sum_{d|n} f(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

ΑΠΟΔ.

Αν $d|n \Rightarrow \frac{n}{d}|n$

Από πρόταση $\sum_{d|n} \mu(d) = g(n) = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & n>1 \end{cases}$

$$\sum_{d|n} f(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) \stackrel{\oplus}{=} \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{c|\frac{n}{d}} f(c) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{d|cn} f(c) = \sum_{c|n} f(c) \sum_{d|\frac{n}{c}} \mu(d)$$

$$\sum_{d|n} \mu(d) \stackrel{\oplus}{=} \sum_{d|\frac{n}{c}} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \frac{n}{c}=1 \Leftrightarrow n=c \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \stackrel{\oplus}{=} \sum_{c|n} f(c) \cdot 1 = f(n)$$

Τα x, y, z είναι
αριθμοί

$$\left. \begin{aligned} d|n &\Rightarrow n = dd' = d \cdot \frac{n}{d} \\ c|\frac{n}{d} &\Rightarrow \frac{n}{d} = cc' \end{aligned} \right\} \Rightarrow n = dcc' \Rightarrow d|cn$$

Πρόταση $n = \sum_{d|n} \phi(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right)$

Απόδ.

$\phi(n) = \sum_{d|n} d = \sum_{d|n} 1(d)$. Με τον τύπο αντιστροφής του Möbius για $f=1$ και $f=\phi$, έχουμε $1(n) = \sum_{d|n} \phi(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right)$

Πρόταση $\phi(n) = \sum_{d|n} 1(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right)$

$\swarrow \quad \downarrow \quad \searrow$
 Euler Tautotekni Möbius

Απόδ.

Από τον τύπο του Gauss $n = 1(n) = \sum_{d|n} \phi(d)$

$f \swarrow$
 αντιστροφή: $\phi(n) = f(n) = \sum_{d|n} f(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right) =$

$$= \sum_{d|n} 1(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} d \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$